数理解析研究所講究録
1173 巻 2000 年 82-97

SIEGEL CUSP FORMS の LIFTING の実例

池田　保　　（京都大学大学院理学研究科）

Siegel modular form の 2 種類の lifting を構成し、その実例を挙げる。$M_k^{(n)} = M_k(\mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z}))$ を degree n の Siegel modular form の空間とする。$S_k^{(n)} = S_k(\mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z}))$ を cusp form の全体のなす $M_k^{(n)}$ の部分空間とする。

1. Duke-Imamoglu lifting

自然数 k, n で $k \equiv n \bmod 2$ を満たすものを固定し、$\varepsilon = (-1)^k$ とおく。$N \in \mathbb{Q}_+^\times$ に対して、$\mathbb{Q}(\sqrt{\varepsilon N})/\mathbb{Q}$ の判別式の絶対値を $\mathfrak{d}_N$ で表わし、$\mathfrak{f}_N = \sqrt{N\mathfrak{d}_N^{-1}}$ とおく。また、$\mathbb{Q}(\sqrt{\varepsilon N})/\mathbb{Q}$ に対応する原始的な Dirichlet 指標を χ_N で表わす。B を rank $2n$ の正定値半整数対称行列とするとき、$(-1)^n \det(2B) \equiv 0, 1 \mod 4$ である。このとき、$D_B = \det(2B), \mathfrak{d}_B = \mathfrak{d}_{D_B}, \mathfrak{f}_B = \mathfrak{f}_{D_B}, \chi_B = \chi_{D_B}$ とおく。

p を素数とする。$\mathbb{Z}_p$ 上の $2n$ 次の non-degenerate half-integral symmetric matrix B に対して

$$
\begin{aligned}
D_B &= \det(2B) \\
\delta(B) &= \begin{cases} 2\left[\frac{\mathrm{ord}_p(D_B)+1}{2}\right], & p \neq 2 \\ 2\left[\frac{\mathrm{ord}_p(D_B)}{2}\right], & p = 2 \end{cases} \\
\xi(B) &= \begin{cases} 1 & (-1)^n D_B \in (\mathbb{Q}_p^\times)^2, \\ -1, & [\mathbb{Q}_p(\sqrt{(-1)^n D_B}) : \mathbb{Q}_p] = 2, : \text{ unramified}, \\ 0, & [\mathbb{Q}_p(\sqrt{(-1)^n D_B}) : \mathbb{Q}_p] = 2, : \text{ ramified} \end{cases}
\end{aligned}
$$

とおく。

$$
b_p(B, s) = \sum_{R \in \mathcal{S}_{2n}(\mathbb{Q}_p)/\mathcal{S}_{2n}(\mathbb{Z}_p))} \psi(\mathrm{tr}(BR)) p^{-\mathrm{ord}_p(\mu(R))s}
$$

を Siegel series という。ここで $\mathcal{S}_{2n}(\mathbb{Q}_p), \mathcal{S}_{2n}(\mathbb{Z}_p)$ はそれぞれ $\mathbb{Q}_p, \mathbb{Z}_p$ 係数の対称行列の空間である。また、$\mu(R)$ は次のように定義される。(C, D) を symmetric coprime pair で $D^{-1}C = R$ なるものをとるとき、$\mu(R) = \det D$ で定義される。X の多項式 $\gamma_p(B; X)$ を

$$
\gamma_p(B; X) = (1 - X)(1 - p^n \xi(B) X)^{-1} \prod_{i=1}^{n} (1 - p^{2i} X^2)
$$

で定義する。このとき、X の多項式 $F(B; X)$ で $F(B; p^{-s}) = b_p(B, s)\gamma_p(B; p^{-s})^{-1}$ を満たすものが存在する。Katsurada ([23]) によると $F(B; X)$ は次のような関数等式を満たす。

$$
F(B; p^{-2n+1} X^{-1}) = (p^{n+\frac{1}{2}} X)^{-\delta(B)+2-2\xi(B)^2} F(B; X)
$$

$\tilde{F}_p(B;X) = X^{-\frac{\delta(B)}{2}+1-\xi(B)^2} F(B;X)$ とおく。このとき上の関数等式から、$\tilde{F}_p(B;X^{-1}) = \tilde{F}_p(B;X)$ が成り立つことがわかる。

$$E_{2n,l}(Z) = \sum_{(C,D)/\sim} \det(CZ+D)^{-l}$$

を degree $2n$ の Siegel Eisenstein series とする。k が十分大で $k \equiv n \bmod 2$ ならば正定値半整数対称行列 B に対して $E_{2n,k+n}(Z)$ の B 番目の Fourier 係数は

$$\frac{2^n}{\zeta(1-k-n)\prod_{i=1}^{n}\zeta(1+2i-2k-2n)}$$

と

$$L(\chi_B;1-k)\prod_{p|D_B} \mathfrak{f}_B^{k-(1/2)} \tilde{F}_p(B;p^{k-(1/2)})$$

の積に等しい。

$$f(\tau) = \sum_{N>0} a(N)q^N \in S_{2k}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})), \qquad a(1)=1$$

を weight $2k$ の cusp form で Hecke 作用素の同時固有関数とする。$L(s,f) = \sum_N a(N)N^{-s}$ を $f(\tau)$ の L 関数とする。

$f(\tau)$ の Satake parameter を $\{\alpha_p, \alpha_p^{-1}\}$ とする。α_p は

$$(1-p^{k-\frac{1}{2}}\alpha_p X)(1-p^{k-\frac{1}{2}}\alpha_p^{-1}X) = 1 - a(p)X + p^{2k-1}X^2$$

によって与えられる。志村対応によって f と対応する Kohnen plus subspace $S^+_{k+\frac{1}{2}}(\Gamma_0(4))$ に属する Hecke eigenform を

$$h(\tau) = \sum_{\substack{N>0 \\ (-1)^k N \equiv 0,\,1\ (4)}} c(N)q^N$$

とする。D が fundamental discriminant で $(-1)^k D > 0$ のとき、

$$c(f^2|D|) = c(|D|)\sum_{d|f} \mu(d)\chi_{|D|}(d)d^{2k-1}a\left(\frac{f}{d}\right)$$

が成り立つ。このとき、次の定理が成り立つ。

定理 1 ：$n \equiv k \bmod 2$ のとき、$A(B)$ を

$$A(B) = c(\mathfrak{d}_B)\mathfrak{f}_B^{k-\frac{1}{2}} \prod_p \tilde{F}_p(B;\alpha_p)$$

によって定義すれば

$$F(Z) = \sum_{B>0} A(B)\mathbf{e}(BZ)$$

は $S_{k+n}(\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Z}))$ に属する degree $2n$, weight $k+n$ の Siegel cusp form で Hecke 作用素の同時固有関数である。ここで正方行列 T に対して $\mathbf{e}(T) := \exp(2\pi\sqrt{-1}\,\mathrm{tr}(T))$ である。$F(Z)$ の standard L-function は

$$L(s,F) = \zeta(s)\prod_{i=1}^{2n} L(s+k+n-i,f)$$

である。

$F(Z) \in S_{k+n}^{(2n)}$ を $f(\tau)$ の degree $2n$ への Duke-Imamoglu lift ということにする。$n=1$ のときは $F(Z)$ は $f(\tau)$ の Saito-Kurokawa lift に等しい。

2. Miyawaki lifting

$f(\tau) \in S_{2k}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$ を normalized cuspidal Hecke eigenform とする。r, n を自然数とし、$n+r \equiv k \bmod 2$ と仮定する。定理1による $f(\tau)$ の $S_{k+n+r}(\mathrm{Sp}_{2n+2r}(\mathbb{Z}))$ への lift を $F(Z)$ とする。$g(Z) \in S_{k+n+r}(\mathrm{Sp}_r(\mathbb{Z}))$ を Hecke 作用素の同時固有関数とする。

$$\mathcal{F}_{f,g}(Z) = \int_{\mathrm{Sp}_r(\mathbb{Z})\backslash\mathfrak{h}_r} F\left(\begin{pmatrix} Z & \\ & Z' \end{pmatrix}\right) \overline{g(Z')} (\det \mathrm{Im} Z')^{k+n-1} dZ', \qquad Z \in \mathfrak{h}_{2n+r}$$

と定義する。$\mathcal{F}_{f,g} \in S_{k+n+r}(\mathrm{Sp}_{2n+r}(\mathbb{Z}))$ である。このとき、次の定理が成り立つ。

定理2： $\mathcal{F}_{f,g}(Z)$ が恒等的に 0 でないならば $\mathcal{F}_{f,g}(Z)$ は Hecke 作用素の同時固有関数であり、

$$L(s, \mathcal{F}_{f,g}) = L(s, g) \prod_{i=1}^{2n} L(s+k+n-i, f)$$

が成り立つ。ここで $L(s, \mathcal{F}_{f,g})$, $L(s,g)$ はそれぞれ $\mathcal{F}_{f,g}(Z)$, $g(Z)$ の standard L 関数である。

$\mathcal{F}_{f,g}(Z)$ を $g(Z)$ の $F(Z)$ による Miyawaki lift ということにする。

3. Niemeier lattices

rank 24 の positive definite even unimodular lattice を Niemeier lattice という。その norm 2 の vector の集合は root system をなし、その root system の同値類によって分類される。Niemeier lattice は 24 種類あり、対応する root system は次の通りである。

L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6	L_7	L_8
$\emptyset$	A_1^{24}	A_2^{12}	A_3^8	A_4^6	$A_5^4 D_4$	D_4^6	A_6^4
L_9	L_{10}	L_{11}	L_{12}	L_{13}	L_{14}	L_{15}	L_{16}
$A_7^2 D_5^2$	A_8^3	$A_9^2 D_6$	D_6^4	$A_{11} D_7 E_6$	E_6^4	A_{12}^2	D_8^3
L_{17}	L_{18}	L_{19}	L_{20}	L_{21}	L_{22}	L_{23}	L_{24}
$A_{15} D_9$	$D_{10} E_7^2$	$A_{17} E_7$	D_{12}^2	A_{24}	$D_{16} E_8$	E_8^3	D_{24}

V をこれらの同型類 $\{[L_1], \dots, [L_{24}]\}$ を基底にもつ $\mathbb{C}$-vector 空間とする。V 上の演算 $\circ$ と内積 $\langle\, , \,\rangle$ を

$$[L_i] \circ [L_j] = \begin{cases} (\#\mathrm{Aut}(L_i))[L_i], & i = j \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

$$\langle [L_i], [L_j] \rangle = \begin{cases} (\#\mathrm{Aut}(L_i)), & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

によって定義する。V には L_1 の直交群の Hecke 環が作用する。Nebe と Venkov [31] はこの作用による同時固有 vector を計算した。これを $\mathrm{d}_1, \dots, \mathrm{d}_{24}$ とする。d_i を $[L_i]$ の一次結合で表したときの係数については Nebe の homepage [30] を参照。

L_i $(i=1,2,\ldots,24)$ の n 次の theta function を $\Theta_i^{(n)}(Z) \in M_{12}^{(n)}$ とする。$\Theta_i^{(n)}(Z)$ は

$$\Theta_i^{(n)}(Z) = \sum_{x \in L_i^n} \exp(\pi\sqrt{-1}\mathrm{tr}(T(x)Z)),$$

$$T(x) := ((x_i, x_j))_{1\le i,j\le n}, \qquad x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in L_i^n$$

によって定義される。Siegel の Φ-operator を $\Phi = \Phi_n : M_k^{(n)} \to M_k^{(n-1)}$ で表せば $\Phi(\Theta_i^{(n)}) = \Theta_i^{(n-1)}$ である。$\Theta_i^{(n)}$ を V から $M_{12}^{(n)}$ への写像に線形に拡張する。$n \ge 12$ ならばこれは単射である。

$$n_i = \min\{n \mid \Theta^{(n)}(\mathrm{d}_i) \ne 0\}$$

とおく。Nebe と Venkov [31] によると

$$\begin{array}{cccc}
n_1 = 0, & n_2 = 1, & n_3 = 2, & n_4 = 3, \\
n_5 = 4, & n_6 = 4, & n_7 = 5, & n_8 = 5, \\
n_9 = 6, & n_{10} = 6, & n_{11} = 6, & n_{12} = 7, \\
n_{13} = 8, & n_{14} = 7, & n_{15} = 8, & n_{16} = 7, \\
n_{17} = 8, & n_{18} = 8, & 7 \le n_{19} \le 9, & n_{20} = 9, \\
8 \le n_{21} \le 10, & n_{22} = 10, & n_{23} = 11, & n_{24} = 12.
\end{array}$$

である。$F_i = \Theta^{(n_i)}(\mathrm{d}_i)$ $(i \ne 19, 21)$ とおく。また、彼等は $n_{19} = 9$, $n_{21} = 10$ と予想している。これに従い $G_{19} = \Theta^{(9)}(\mathrm{d}_{19})$, $G_{21} = \Theta^{(10)}(\mathrm{d}_{21})$ とおく。$F_i \in S_{12}^{(n_i)}$, $(i \ne 19, 21)$ であるが $G_{19} \in M_{12}^{(9)}$, $G_{21} \in M_{12}^{(10)}$ は cusp form かどうかはわからない。ただし、$2B$ が rank < 9 (resp. < 10) の root lattice であるときは G_{19} (resp. G_{21}) の B-番目の Fourier 係数が 0 であることは数値的に確かめられる。また、Fourier 係数を見やすくするために整数 a_i をとり、$f_i = a_i^{-1}F_i$, $g_i = a_i^{-1}G_i$ とおく。a_i の値は次の通り。

a_1	1027637932586061520960267	a_{13}	−57388223692800
a_2	−8104867379578640543040	a_{14}	22660990894080
a_3	−198928738238025600000	a_{15}	−468202291200
a_4	846305351287603200	a_{16}	−82403603251200
a_5	−76569927069081600	a_{17}	−453219817881600
a_6	3605023870156800	a_{18}	−54846554112000
a_7	−128750852505600	a_{19}	1070176665600
a_8	25882222657536000	a_{20}	194172854206464000
a_9	16148201472000	a_{21}	−1375941427200
a_{10}	−23543886643200	a_{22}	−13349383726694400000
a_{11}	1872809164800000	a_{23}	942941135859351552000
a_{12}	109559336140800	a_{24}	−35479695415836672000

定理 2 における積分が消えない条件は次の Lemma によって判定できる。

Lemma 1. d_i, d_j, d_k を V の *Hecke eigenvector* とするとき、

$$\langle\!\langle \Theta^{(n_i+n_j)}(\mathrm{d}_k)|_{\mathfrak{h}_{n_i}\times\mathfrak{h}_{n_j}}, F_i \times F_j \rangle\!\rangle = \frac{\|F_i\|^2\,\|F_j\|^2}{\langle \mathrm{d}_i, \mathrm{d}_i\rangle\,\langle \mathrm{d}_j, \mathrm{d}_j\rangle}\langle \mathrm{d}_k, \mathrm{d}_i \circ \mathrm{d}_j\rangle.$$

が成り立つ。ここで左辺は $(\mathrm{Sp}_{n_i}(\mathbb{Z})\backslash\mathfrak{h}_{n_i}) \times (\mathrm{Sp}_{n_j}(\mathbb{Z})\backslash\mathfrak{h}_{n_j})$ 上の *Peterson* 内積である。とくに、左辺が 0 でないための必要十分条件は $\langle \mathrm{d}_k, \mathrm{d}_i \circ \mathrm{d}_j\rangle \ne 0$ である。

定数 $\langle \mathrm{d}_k, \mathrm{d}_i \circ \mathrm{d}_j \rangle$ については [30] に表がある。

4. 実例

$\phi_{16}(\tau) \in S_{16}^{(1)}$, $\phi_{18}(\tau) \in S_{18}^{(1)}$, $\phi_{20}(\tau) \in S_{20}^{(1)}$, $\phi_{22}(\tau) \in S_{22}^{(1)}$ を normalized Hecke eigenform とする。また、$\Delta(\tau) \in S_{12}^{(1)}$ を Ramanujan の delta function とする。

- (degree 2) $F_3 \in S_{12}^{(2)}$ は $\phi_{22} \in S_{22}^{(1)}$ の degree 2 への Duke-Imamoglu lift (Saito-Kurokawa lift) である。
- (degree 3) $F_4 \in S_{12}^{(3)}$ は $\Delta \in S_{12}^{(1)}$ の $F_5 \in S_{12}^{(4)}$ による Miyawaki lift である。
$$L(s, F_4, \mathrm{st}) = L(s, \Delta, \mathrm{st})L(s+10, \phi_{20})L(s+9, \phi_{20}).$$
- (degree 4) $F_5 \in S_{12}^{(4)}$ は $\phi_{20} \in S_{20}^{(1)}$ の degree 4 への Duke-Imamoglu lift である。また、$F_6 \in S_{12}^{(4)}$ は $F_3 \in S_{12}^{(2)}$ の $F_{11} \in S_{12}^{(6)}$ による Miyawaki lift である。
$$\begin{aligned} L(s, F_5, \mathrm{st}) =& \zeta(s) \prod_{8 \le i \le 11} L(s+i, \phi_{20}), \\ L(s, F_6, \mathrm{st}) =& \zeta(s) \prod_{10 \le i \le 11} L(s+i, \phi_{22}) \prod_{8 \le i \le 9} L(s+i, \phi_{18}). \end{aligned}$$
- (degree 5) $F_7 \in S_{12}^{(5)}$ は $F_4 \in S_{12}^{(3)}$ の $F_{13} \in S_{12}^{(8)}$ による Miyawaki lift である。また、$F_8 \in S_{12}^{(5)}$ は $\Delta \in S_{12}^{(1)}$ の $F_{11} \in S_{12}^{(6)}$ による Miyawaki lift である。
$$\begin{aligned} L(s, F_7, \mathrm{st}) =& L(s, \Delta, \mathrm{st}) \prod_{9 \le i \le 10} L(s+i, \phi_{20}) \prod_{7 \le i \le 8} L(s+i, \phi_{16}), \\ L(s, F_8, \mathrm{st}) =& L(s, \Delta, \mathrm{st}) \prod_{7 \le i \le 10} L(s+i, \phi_{18}). \end{aligned}$$
- (degree 6) $F_9 \in S_{12}^{(6)}$ は $F_3 \in S_{12}^{(2)}$ の $F_{13} \in S_{12}^{(8)}$ による Miyawaki lift である。また、$F_{11} \in S_{12}^{(6)}$ は $\phi_{18} \in S_{18}^{(1)}$ の degree 6 への Duke-Imamoglu lift である。
$$\begin{aligned} L(s, F_9, \mathrm{st}) =& \zeta(s) \prod_{10 \le i \le 11} L(s+i, \phi_{22}) \prod_{6 \le i \le 9} L(s+i, \phi_{16}), \\ L(s, F_{11}, \mathrm{st}) =& \zeta(s) \prod_{6 \le i \le 11} L(s+i, \phi_{18}). \end{aligned}$$
- (degree 7) $F_{12} \in S_{12}^{(7)}$ は $\Delta \in S_{12}^{(1)}$ の $F_{13} \in S_{12}^{(8)}$ による Miyawaki lift である。また、$F_{14} \in S_{12}^{(7)}$ は $F_7 \in S_{12}^{(5)}$ の $F_{24} \in S_{12}^{(12)}$ による Miyawaki lift である。また、$F_{16} \in S_{12}^{(7)}$ は $F_8 \in S_{12}^{(5)}$ の $F_{24} \in S_{12}^{(12)}$ による Miyawaki lift である。
$$\begin{aligned} L(s, F_{12}, \mathrm{st}) =& L(s, \Delta, \mathrm{st}) \prod_{5 \le i \le 10} L(s+i, \phi_{16}), \\ L(s, F_{14}, \mathrm{st}) =& L(s, \Delta, \mathrm{st}) \prod_{9 \le i \le 10} L(s+i, \phi_{20}) \prod_{7 \le i \le 8} L(s+i, \phi_{16}) \\ & \times \prod_{5 \le i \le 6} L(s+i, \Delta), \\ L(s, F_{16}, \mathrm{st}) =& L(s, \Delta, \mathrm{st}) \prod_{7 \le i \le 10} L(s+i, \phi_{18}) \prod_{5 \le i \le 6} L(s+i, \Delta). \end{aligned}$$

- (degree 8) $F_{13} \in S_{12}^{(8)}$ は $\phi_{16} \in S_{16}^{(1)}$ の degree 8 への Duke-Imamoglu lift である。また、$F_{17} \in S_{12}^{(8)}$ は $F_5 \in S_{12}^{(4)}$ の $F_{24} \in S_{12}^{(12)}$ による Miyawaki lift である。また、$F_{18} \in S_{12}^{(8)}$ は $F_6 \in S_{12}^{(4)}$ の $F_{24} \in S_{12}^{(12)}$ による Miyawaki lift である。

$$\begin{aligned}
L(s, F_{13}, \mathrm{st}) =& \zeta(s) \prod_{4 \leq i \leq 11} L(s+i, \phi_{16}), \\
L(s, F_{17}, \mathrm{st}) =& \zeta(s) \prod_{8 \leq i \leq 11} L(s+i, \phi_{20}) \prod_{4 \leq i \leq 7} L(s+i, \Delta), \\
L(s, F_{18}, \mathrm{st}) =& \zeta(s) \prod_{10 \leq i \leq 11} L(s+i, \phi_{22}) \prod_{8 \leq i \leq 9} L(s+i, \phi_{18}) \\
& \times \prod_{4 \leq i \leq 7} L(s+i, \Delta).
\end{aligned}$$

- (degree 9) $F_{20} \in S_{12}^{(9)}$ は $F_4 \in S_{12}^{(3)}$ の $F_{24} \in S_{12}^{(12)}$ による Miyawaki lift である。

$$L(s, F_{20}, \mathrm{st}) = L(s, \Delta, \mathrm{st}) \prod_{9 \leq i \leq 10} L(s+i, \phi_{20}) \prod_{3 \leq i \leq 8} L(s+i, \Delta).$$

- (degree 10) $F_{22} \in S_{12}^{(10)}$ は $F_3 \in S_{12}^{(2)}$ の $F_{24} \in S_{12}^{(12)}$ による Miyawaki lift である。

$$L(s, F_{22}, \mathrm{st}) = \zeta(s) \prod_{10 \leq i \leq 11} L(s+i, \phi_{22}) \prod_{2 \leq i \leq 9} L(s+i, \Delta).$$

- (degree 11) $F_{23} \in S_{12}^{(11)}$ は $\Delta \in S_{12}^{(1)}$ の $F_{24} \in S_{12}^{(12)}$ による Miyawaki lift である。

$$L(s, F_{23}, \mathrm{st}) = L(s, \Delta, \mathrm{st}) \prod_{i=1}^{10} L(s+i, \Delta).$$

- (degree 12) $F_{24} \in S_{12}^{(12)}$ は $\Delta \in S_{12}^{(1)}$ の degree 12 への Duke-Imamoglu lift である。

$$L(s, F_{24}, \mathrm{st}) = \zeta(s) \prod_{i=0}^{11} L(s+i, \Delta).$$

5. $a_i^{-1}\mathrm{d}_i$ を $[L_j]$ の一次結合で表わす係数

	f_1	f_2
1	1557057285233049600/10276379325860615209602670	−51081338880/19144150084038739
2	3152271217195900800000/1027637932586061520960267	−51063255886500/19144150084038739
3	3129279325918986240000000/1027637932586061520960267	−2223551762432000/172297350756348651
4	4375992416738342400000000/1027637932586061520960267	17879300010000/19144150084038739
5	1806745745847193247416320/1027637932586061520960267	787045945061376/95720750420193695
6	5227852273863406387200000/1027637932586061520960267	88957300303872/19144150084038739
7	1196560426451890500000/1027637932586061520960267	16288568170875/153153200672309912
8	836107985490857164800000/1027637932586061520960267	148190369513472/134009050588271173
9	270061246290137702400000/1027637932586061520960267	63562804637904/134009050588271173
10	2258007676865740800000/1027637932586061520960267	139167796951040/281419006235369463
11	1066908627319062528000/1027637932586061520960267	3751427716608/134009050588271173
12	19144966823230248000/1027637932586061520960267	769335762195/153153200672309912
13	808264111605350400000/1027637932586061520960267	378161536896/134009050588271173
14	3735033917655040000/1027637932586061520960267	67403792456/516892052269045953
15	834785957117952000/1027637932586061520960267	43909312512/134009050588271173
16	1569831463275075000/1027637932586061520960267	146715432435/214414480941233876
17	333075870167040000/1027637932586061520960267	16329417456/93806335411789821
18	41345355411360000/1027637932586061520960267	9453825953/375225341647159284
19	3483146354688000/1027637932586061520960267	1991097856/93806335411789821
20	672716268315000/1027637932586061520960267	451690629/857657923764935507
21	41736889958400/1027637932586061520960267	17872896/469031677058949105
22	2710578370500/1027637932586061520960267	18386775/600360546635454855
23	638045608200/1027637932586061520960267	58429085/810486737957864054
24	248771250/1027637932586061520960267	681/150090136658863713

	f_3	f_4
1	6534528/2740971371225	−1430/607341321
2	25526163663/21927770969800	−295295/539858952
3	124081974016/74006227023075	22392370/49194647001
4	−24564737197/6578331290940	12875787925/12593829632256
5	−58743773088/68524284280625	−80739659/109321437780
6	299547119872/342621421403125	−51427376/136651797225
7	3510317811/175422167758400	−16071055/1865752538112
8	480163963136/1027864264209375	260748202/8609063225175
9	417118124709/1370485685612500	8596096223/81626673542400
10	547462716944/12951089729038125	5407831/218642875560
11	18383688752/616718558525625	124477639/5165437935105
12	56300046803/10525330065504000	871343473/201501274116096
13	1431192906/342621421403125	649961/125967088800
14	42856276463/22201868106922500	50046997/209897160537600
15	1704174112/3083592792628125	82428011/103308758702100
16	1135877457/8771108387920000	20935057/97952008250880
17	3461872843/86340598193587500	546171827/6611760556934400
18	18886927631/27628991421948000	49560797/2938560247526400
19	124307216/21585149548396875	40774/2869687741725
20	36703901/197349938728200000	257867467/423152675643801600
21	68176/4317029909679375	2533/41323503480840
22	155397/98236413944704000	359/46436507615232
23	7407257/19892873823802560000	51337/28210178376253440
24	8453/22103193137558400000	2621/846305351287603200

	f_5	f_6
1	−8/2854521	−11/2587104
2	−755/2537352	−64295/147177472
3	169720/231216201	871255/838221696
4	−257425/870460992	−6535375/26823094272
5	−177601/642267225	−15431339/18627148800
6	−2162/71363025	6759599/18627148800
7	−137935/2192272128	4486405/63580667904
8	86403496/283239846225	−9203513/146688796800
9	−53259421/671383339200	57690413/347706777600
10	967891/37765312830	−5621/165574656
11	−1868491/849719538675	−174075649/7041062246400
12	−11074741/1183826949120	9717631/2145847541760
13	−4940267/755306256600	−765223/130390041600
14	−170353/246630614400	26257/223525785600
15	−1417847/9346914925425	−7888457/3520531123200
16	−1379837/3222640028160	−1793275/5340776103936
17	−5913577/54382050475200	−7872769/28164248985600
18	−1343939/24169800211200	−1058321/25034887987200
19	−2627/94413282075	−6107/111762892800
20	−6351701/3480451230412800	−2737951/901255967539200
21	−247/1699439077350	−3119/7041062246400
22	−30049/773433606758400	−7487/133519402598400
23	−827/68244141772800	−12287/1201674623385600
24	−1601/76569927069081600	−157/3605023870156800

	f_8	f_7
1	13/2653440	−49/646776
2	15873/90570752	−115885/36794368
3	−53807/85971456	2537465/209555424
4	670735/1375543296	−91109375/6705773568
5	1013597/2388096000	11094923/4656787200
6	−1193387/2122752000	874699/310452480
7	−1620229/13042188288	−8127385/15895166976
8	2049749/10746432000	1380931/1047777120
9	4809337/178311168000	−2354293/2483619840
10	−1359241/280840089600	−121601/429857280
11	−4229173/1031657472000	−45895397/251466508800
12	3180827/275108659200	17086643/536461885440
13	151099/57314304000	163519/2794072320
14	145483/114628608000	19453/2235257856
15	−120803/32239296000	−90557/25146650880
16	872989/3912656486400	7988837/953710018560
17	−55202957/101102432256000	561137/201173207040
18	1743521/44934414336000	374249/178820628480
19	−638609/5616801792000	5587/5588144640
20	−7174843/924365094912000	9733/99039117312
21	−27263/12637804032000	2393/251466508800
22	−547213/2875802517504000	48847/14305650278400
23	54301/8627407552512000	45917/42916950835200
24	−10117/25882222657536000	83/25750170501120

	f_{11}	f_9	f_{10}
1	−1/806400	77/2190240	1/16896
2	−3/6553600	16709/41533440	105/262144
3	733/37324800	−36113/13141440	−16415/5474304
4	−253/39813120	9163/1752192	423325/87588864
5	−21571/276480000	−10241/2737800	−157073/121651200
6	323417/4147200000	1095787/5256576000	−75677/40550400
7	74281/2831155200	5294597/17942446080	−140315/415236096
8	−272581/10886400000	96151/328536000	7901/12441600
9	−65927/3225600000	−63899/2336256000	33103/40550400
10	2209339/243855360000	157091/1576972800	−84919/1021870080
11	17273/14929920000	6281/6307891200	−876961/6569164800
12	−37673/7962624000	−16709/1051315200	−95207/3503554560
13	13229/6220800000	−401977/15769728000	−1891/182476800
14	16511/24883200000	−42581/10513152000	5131/729907200
15	−1123/37324800000	−15913/1971216000	1049/298598400
16	−853061/1981808640000	1648141/358848921600	−241217/24914165760
17	−46187/228614400000	107/7008768000	12821/11496038400
18	97571/1219276800000	56353/50463129600	167/464486400
19	7403/1219276800000	−2063/31539456000	7141/5109350400
20	−523787/66886041600000	334673/4037050368000	33857/840853094400
21	−41/29262643200	−1/292032000	1723/45984153600
22	−12683/124853944320000	67321/16148201472000	14087/2615987404800
23	36427/374561832960000	187/119616307200	8761/7847962214400
24	−1349/1872809164800000	73/16148201472000	383/23543886643200

	f_{12}	f_{16}	f_{14}
1	−1/101088	5/177408	−5/243936
2	11/638976	−3645/10092544	285/1982464
3	413/1213056	145/171072	155/3763584
4	−5185/4478976	−274475/306561024	−45725/60217344
5	7/5120	4223/6082560	2933/3345408
6	−11039/26956800	−42667/182476800	−6959/50181120
7	−931/10223616	−135155/622854144	5905/856424448
8	−141577/636854400	−1/10886400	−1787/11975040
9	421/2329600	65479/283852800	−2501/39029760
10	−24259/4755179520	−526357/5364817920	53531/2950649856
11	8783/6113802240	−12161/4598415360	6713/180652032
12	−413/35831808	7673/350355456	8651/481738752
13	−1063/849139200	−16739/958003200	−443/75271680
14	7/17971200	−779/121651200	−35/20072448
15	28103/15284505600	46493/5748019200	−667/451630080
16	−359/477102080	7811/87199580160	−12197/23979884544
17	−1243/26747884800	91367/160944537600	−5879/11064936960
18	529/23775897600	106091/214592716800	361/14753249280
19	−5543/23775897600	15347/53648179200	1819/14753249280
20	193621/3912833433600	−313963/2942985830400	−20891/809321103360
21	−437/42796615680	−85/3218890752	443/44259747840
22	451/187280916480	−16067/5493573550080	21193/7553663631360
23	127/187280916480	17441/5493573550080	2201/1510732726272
24	187/109559336140800	−3901/82403603251200	283/22660990894080

	f_{13}	f_{17}	f_{18}	f_{15}
1	7/1347840	1/278784	−1/118080	1/2352
2	−7/638976	−435/7929856	213/1343488	−1947/401408
3	−49/202176	5/38016	−1169/2550528	109/21168
4	36295/38817792	−25075/240869376	2635/5101056	168895/12192768
5	−49/38400	463/83635200	−54859/283392000	−17177/564480
6	4067/8985600	419/20072448	−38591/425088000	250303/16934400
7	343/3407872	−3985/3425697792	13853/580386816	56783/57802752
8	4567/15163200	−119/18817920	17149/318816000	11033/2381400
9	−421/1331200	3457/312238080	−523/94464000	−14983/3763200
10	1427/113218560	7621/2950649856	75433/7141478400	−8873/10160640
11	−8783/1455667200	−65419/9032601600	−46703/7651584000	2689/182891520
12	2891/59719680	−34981/9634775040	−5789/8161689600	−4363/97542144
13	−1063/80870400	89/301086720	61/159408000	691/1587600
14	49/11980800	293/401448960	301/425088000	−827/33868800
15	28103/4003084800	29/41057280	−8639/7651584000	−12463/228614400
16	−359/204472320	6839/13702791168	4553/58038681600	−8297/1156055040
17	−1243/20379340800	1849/35407798272	11563/53561088000	929/914457600
18	23/1132185600	−425/11802599424	−919/8926848000	−4301/406425600
19	−241/1132185600	−2957/29506498560	601/17853696000	313/101606400
20	5233/186325401600	−23197/3237284413440	14543/1958805504000	−18877/117050572800
21	−23/5094835200	617/221298739200	73/107122176000	−23/91445760
22	451/579679027200	−15809/151073272627200	−4429/18282184704000	911/10404495360
23	127/579679027200	25849/50357757542400	10223/18282184704000	73/3468165120
24	17/57388223692800	61/18128792715264	−1303/54846554112000	83/468202291200

	f_{20}	g_{19}	f_{22}	g_{21}
1	−1/139345920	1/1209600	1/1916006400	−1/172800
2	37/226492416	−15/917504	−227/15571353600	59/393216
3	−349/644972544	1/21504	307/5542732800	−1177/2239488
4	3835/5159780352	−317/6967296	−593/6449725440	6647/8957952
5	−30719/71663616000	17/12902400	3341/44789760000	−19093/49766400
6	−83/23887872000	457/19353600	−3901/149299200000	−193/1658880
7	19/32614907904	−197/132120576	893/203843174400	437/56623104
8	50143/564350976000	−209/43545600	−4387/881798400000	1513/11197440
9	−367/334430208000	−19/4300800	313/2090188800000	97/3317760
10	−63631/4213820620800	−17/9289728	53387/13168189440000	−761/59719680
11	−1711/3869835264000	1987/1045094400	−1829/967458816000	−34921/1343692800
12	377/4127824281600	67/1114767360	403/1031956070400	−757/1433272320
13	59/26873856000	1/2419200	1/167961600000	1/186624
14	−59/107495424000	−1/9676800	−1/671846400000	−1/746496
15	−899/1934917632000	−41/1045094400	1643/66512793600000	143/53747712
16	−94831/205473919795200	−41/528482304	60199/1284211998720000	3869/10192158720
17	37787/189621927936000	−29/1045094400	−60581/1185137049600000	−31/53747712
18	227/42138206208000	1/232243200	−2543/263363788800000	1/59719680
19	−227/21069103104000	−1/116121600	2543/131681894400000	−1/29859840
20	60367/6934744793088000	527/267544166400	913243/476763704524800000	23/68797071360
21	−269/189621927936000	1/2090188800	−233/1303650754560000	1/537477120
22	−33527/21574761578496000	−1/13212057600	−3149/26968451973120000	67/152882380800
23	33527/64724284735488000	1/39636172800	3149/80905355919360000	−67/458647142400
24	2833/194172854206464000	−1/1070176665600	6541/1334938372669440000	−1/275188285440

	f_{23}	f_{24}
1	−1/19334025216	1/152769576960
2	2039/1099891212288	−1/3183476736
3	−1129/136178786304	1/591224832
4	1685/99039117312	−5/1146617856
5	−5213/275108659200	13/1990656000
6	6059/458514432000	−83/11943936000
7	−1387/626025037824	19/16307453952
8	−3649/1547486208000	41/15676416000
9	−17/6419202048000	−1/37158912000
10	−49841/80881945804800	−197/351151718400
11	1711/2971173519360	59/214990848000
12	−377/3169251753984	−13/229323571200
13	−59/515828736000	−1/35831808000
14	59/2063314944000	1/143327232000
15	8401/408536358912000	31/7685922816000
16	11137/563422534041600	37/11415217766400
17	−40571/3639687561216000	−29/21069103104000
18	−1163/808819458048000	−1/7023034368000
19	1163/404409729024000	1/3511517184000
20	258163/1464194310340608000	53/4237899595776000
21	−2363/184168190597529600	−1/1332620771328000
22	−509/82823112504115200	−1/3595793596416000
23	509/248469337512345600	1/10787380789248000
24	13163/942941135859351552000	1/2729207339679744000

6. Fourier 係数

以下、 degree 4 以上のものについて Fourier 係数の計算結果を挙げる。$f_4 \in S_{12}^{(3)}$ については Miyawaki [28] に Fourier 係数の表がある。また、 $f_{24} \in S_{12}^{(12)}$ は [6] の cusp form と同じもので、[6] と R. E. Borcherds の homepage [5] に Fourier 係数の表がある。a_i の値はこの表に現れる Fourier 係数がすべて整数になるように正規化してあるが、f_i の Fourier 係数がすべて整数となるかどうかはわからない。ただし、f_{24} の Fourier 係数はすべて整数となることがわかっている。([21] 参照) 同様のことが Duke-Imamoglu lifting となっているものに対しては成り立つと思われるがまだ確認していない。

この Fourier 係数の計算に関しては [5] にあるプログラムを改変して使用した。

(Degree 4) Fourier coefficients of f_5 and f_6.

f_5	f_6	Lattice	det
−3	2	D_4	4
1	−5	A_4	5
−38	−44	$A_1\ A_3$	8
−78	−78	A_2^2	9
−492	−816	$A_1^2\ A_2$	12
−4440	−6400	A_1^4	16

(Degree 5) Fourier coefficients of f_8 and f_7.

f_8	f_7	Lattice	det
2	23	D_5	4
−21	6	A_5	6
96	1104	$A_1\ D_4$	8
−190	1280	$A_1\ A_4$	10
−108	4698	$A_2\ A_3$	12
−1696	31976	$A_1^2\ A_3$	16
−3564	57024	$A_1\ A_2^2$	18
−29376	422496	$A_1^3\ A_2$	24
−188160	3348480	A_1^5	32

(Degree 6) Fourier coefficients of f_{11}, f_9, and f_{10}.

f_{11}	f_9	f_{10}	Lattice	det
1	3	9	E_6	3
−2	34	−31	D_6	4
−16	−133	532	A_6	7
36	668	142	$A_1\ D_5$	8
240	3600	1224	$A_2\ D_4$	12
−272	804	4806	$A_1\ A_5$	12
−240	6390	7200	$A_2\ A_4$	15
32	10256	7360	A_3^2	16
1056	28128	1392	$A_1^2\ D_4$	16
−1800	29800	76100	$A_1^2\ A_4$	20
−1464	96408	140796	$A_1\ A_2\ A_3$	24
−4284	151308	281556	A_2^3	27
−19008	658176	965856	$A_1^3\ A_3$	32
−43920	1095120	1820232	$A_1^2\ A_2^2$	36
−249600	7453440	13014144	$A_1^4\ A_2$	48
−1344000	57615360	80405760	A_1^6	64

(Degree 7) Fourier coefficients of f_{12}, f_{16}, and f_{14}.

f_{12}	f_{16}	f_{14}	Lattice	det
1	6	3	E_7	2
60	−95	−20	D_7	4
90	540	270	$A_1\ E_6$	6
−576	−1461	672	A_7	8
848	−372	144	$A_1\ D_6$	8
2040	4050	2520	$A_2\ D_5$	12
−910	−21000	5670	$A_1\ A_6$	14
5760	12720	7680	$A_3\ D_4$	16
15360	19360	14080	$A_1^2\ D_5$	16
10098	−30132	8694	$A_2\ A_5$	18
18520	−12150	13560	$A_3\ A_4$	20
80640	90720	69120	$A_1\ A_2\ D_4$	24
15840	−222480	90720	$A_1^2\ A_5$	24
88260	−259200	228780	$A_1\ A_2\ A_4$	30
157952	−154368	281856	$A_1\ A_3^2$	32
554496	444096	396288	$A_1^3\ D_4$	32
181440	−408240	544320	$A_2^2\ A_3$	36
564480	−2091600	1405440	$A_1^3\ A_4$	40
1731840	−3499200	2891520	$A_1^2\ A_2\ A_3$	48
2906280	−7873200	4830840	$A_1\ A_2^3$	54
10022400	−22064640	19084800	$A_1^4\ A_3$	64
14515200	−44906400	34214400	$A_1^3\ A_2^2$	72
108057600	−249661440	206668800	$A_1^5\ A_2$	96
778782720	−1181767680	1271900160	A_1^7	128

(Degree 8) Fourier coefficients of f_{13}, f_{17}, f_{18}, and f_{15}.

f_{13}	f_{17}	f_{18}	f_{15}	Lattice	det
1	1	1	105	E_8	1
344	−56	−160	6496	D_8	4
88	88	88	9240	$A_1\ E_7$	4
3696	−304	−1344	91840	$A_1\ D_7$	8
−5535	1665	−3015	−47943	A_8	9
1026	1026	1026	107730	$A_2\ E_6$	9
6048	1248	0	279552	$A_2\ D_6$	12
6048	6048	6048	635040	$A_1^2\ E_6$	12
227904	43584	6144	−3188736	D_4^2	16
8768	5568	4736	683648	$A_3\ D_5$	16
−13760	8640	−37952	214144	$A_1\ A_7$	16
51776	3776	−8704	1881600	$A_1^2\ D_6$	16
−201600	−26880	8064	5239680	$A_4\ D_4$	20
66528	−672	−57456	2008608	$A_2\ A_6$	21
127008	−2592	−36288	3737664	$A_3\ A_5$	24
127008	45408	24192	7292544	$A_1\ A_2\ D_5$	24
364610	37890	−23470	619250	A_4^2	25
−77952	112448	−414624	5916064	$A_1^2\ A_6$	28
798336	199296	64512	12524544	$A_1\ A_3\ D_4$	32
798336	241536	96768	42588672	$A_1^3\ D_5$	32
2032128	407808	48384	12268800	$A_2^2\ D_4$	36
90288	263088	−635472	22277808	$A_1\ A_2\ A_5$	36
−63840	293600	−473088	46704640	$A_1\ A_3\ A_4$	40
−1814400	673920	−1100736	74580480	$A_2^2\ A_4$	45
−241920	1102080	−1064448	74135040	$A_2\ A_3^2$	48
1306368	523008	193536	240768000	$A_1^2\ A_2\ D_4$	48
1306368	1306368	−4354560	137168640	$A_1^3\ A_5$	48
8346240	3321600	−6979392	342615360	$A_1^2\ A_2\ A_4$	60
10921472	3661312	−6529024	501323776	$A_1^2\ A_3^2$	64
33990144	6802944	153600	1016764416	$A_1^4\ D_4$	64
19958400	5132160	−13692672	835985664	$A_1\ A_2^2\ A_3$	72
8064000	18892800	−41610240	2187417600	$A_1^4\ A_4$	80
67423752	7081992	−27287928	1156048200	A_2^4	81
27433728	39898368	−78382080	4773362688	$A_1^3\ A_2\ A_3$	96
−20248704	72441216	−154804608	7647571584	$A_1^2\ A_2^3$	108
535772160	214748160	−428101632	27093872640	$A_1^5\ A_3$	128
959164416	369985536	−813238272	42209095680	$A_1^4\ A_2^2$	144
876718080	2102446080	−3873816576	279801815040	$A_1^6\ A_2$	192
45348556800	11673292800	−17870880768	1513405071360	A_1^8	256

(Degree 9) Fourier coefficients of f_{20} and g_{19}.

f_{20}	g_{19}	Lattice	det
0	0	$A_1\ E_8$	2
1	−224	D_9	4
0	0	$A_2\ E_7$	6
8	−1792	$A_1\ D_8$	8
0	0	$A_1^2\ E_7$	8
38	−1015	A_9	10
0	0	$A_3\ E_6$	12
6	−1344	$A_2\ D_7$	12
120	12288	$D_4\ D_5$	16
0	0	$A_3\ D_6$	16
88	−19712	$A_1^2\ D_7$	16
324	−27594	$A_1\ A_8$	18
0	0	$A_1\ A_2\ E_6$	18
−122	−11840	$A_4\ D_5$	20
−720	−73728	$A_5\ D_4$	24
288	−64512	$A_2\ A_7$	24
144	−32256	$A_1\ A_2\ D_6$	24
0	0	$A_1^3\ E_6$	24
14	−63112	$A_3\ A_6$	28
576	16020	$A_4\ A_5$	30
2880	294912	$A_1\ D_4^2$	32
368	−4096	$A_1\ A_3\ D_5$	32
3328	−265664	$A_1^2\ A_7$	32
864	−193536	$A_1^3\ D_6$	32
1080	−6912	$A_2^2\ D_5$	36
−576	−184320	$A_1\ A_4\ D_4$	40
5544	−432180	$A_1\ A_2\ A_6$	42
7632	405504	$A_2\ A_3\ D_4$	48
3600	−556704	$A_1\ A_3\ A_5$	48
−48	−459264	$A_1^2\ A_2\ D_5$	48
3720	−456900	$A_1\ A_4^2$	50
10368	−1033560	$A_2^2\ A_5$	54
30912	−3325728	$A_1^3\ A_6$	56
10728	−1279440	$A_2\ A_3\ A_4$	60
20608	−777728	A_3^3	64
2880	−958464	$A_1^2\ A_3\ D_4$	64
14400	−1658880	$A_1^4\ D_5$	64
−10368	−3317760	$A_1\ A_2^2\ D_4$	72
57024	−5635008	$A_1^2\ A_2\ A_5$	72
51376	−5809280	$A_1^2\ A_3\ A_4$	80
100224	−10890720	$A_1\ A_2^2\ A_4$	90
92736	−12312576	$A_1\ A_2\ A_3^2$	96
55296	−12386304	$A_1^3\ A_2\ D_4$	96
289152	−30987648	$A_1^4\ A_5$	96
143856	−20062080	$A_2^3\ A_3$	108
547776	−54578880	$A_1^3\ A_2\ A_4$	120
572160	−62361600	$A_1^3\ A_3^2$	128
419328	−41287680	$A_1^5\ D_4$	128
1095552	−118616832	$A_1^2\ A_2^2\ A_3$	144
2691840	−317241600	$A_1^5\ A_4$	160
2239488	−223248960	$A_1\ A_2^4$	162
5261184	−593335296	$A_1^4\ A_2\ A_3$	192
9735552	−1014301440	$A_1^3\ A_2^3$	216
24297984	−2695034880	$A_1^6\ A_3$	256
43089408	−4771146240	$A_1^5\ A_2^2$	288
192761856	−23990722560	$A_1^7\ A_2$	384
824463360	−78080163840	A_1^9	512

(Degree 10) Fourier coefficients of f_{22} and g_{21}.

f_{22}	g_{21}	Lattice	det
0	0	$A_2\ E_8$	3
1	−13216	D_{10}	4
0	0	$A_1^2\ E_8$	4
0	0	$A_3\ E_7$	8
6	−79296	$A_1\ D_9$	8
30	−170247	A_{10}	11
36	−267840	$D_4\ E_6$	12
0	0	$A_2\ D_8$	12
0	0	$A_1\ A_2\ E_7$	12
−36	267840	$A_4\ E_6$	15
40	−134656	D_5^2	16
−24	667392	$D_4\ D_6$	16
−8	105728	$A_3\ D_7$	16
64	−845824	$A_1^2\ D_8$	16
0	0	$A_1^3\ E_7$	16
12	−508800	$A_4\ D_6$	20
222	−2029020	$A_1\ A_9$	20
−252	966528	$A_5\ D_5$	24
72	−535680	$A_1\ A_3\ E_6$	24
108	−1427328	$A_1\ A_2\ D_7$	24
108	−2784726	$A_2\ A_8$	27
216	−1607040	$A_2^2\ E_6$	27
−756	874944	$A_6\ D_4$	28
−192	−1082256	$A_3\ A_7$	32
1008	−4566528	$A_1\ D_4\ D_5$	32
48	66048	$A_1\ A_3\ D_6$	32
480	−6343680	$A_1^3\ D_7$	32
336	−301350	$A_4\ A_6$	35
972	−4092120	A_5^2	36
216	−753408	$A_2^2\ D_6$	36
2052	−16260048	$A_1^2\ A_8$	36
−432	3214080	$A_1^2\ A_2\ E_6$	36
−276	1196160	$A_1\ A_4\ D_5$	40
6912	−51425280	$A_2\ D_4^2$	48
2592	−12980736	$A_2\ A_3\ D_5$	48
−2448	13616640	$A_1\ A_5\ D_4$	48
3456	−23956128	$A_1\ A_2\ A_7$	48
864	−15621120	$A_1^2\ A_2\ D_6$	48
1440	−10713600	$A_1^4\ E_6$	48
1764	−19827360	$A_1\ A_3\ A_6$	56
5400	5132160	$A_2\ A_4\ D_4$	60
1872	−22108320	$A_1\ A_4\ A_5$	60
7560	−56878416	$A_2^2\ A_6$	63
14016	−50580480	$A_3^2\ D_4$	64
9216	25288704	$A_1^2\ D_4^2$	64

f_{22}	g_{21}	Lattice	det
256	−9336832	$A_1^2\ A_3\ D_5$	64
16128	−169710912	$A_1^3\ A_7$	64
4800	−49428480	$A_1^4\ D_6$	64
3240	−40160448	$A_2\ A_3\ A_5$	72
−5184	7575552	$A_1\ A_2^2\ D_5$	72
2160	−80298000	$A_2\ A_4^2$	75
9888	−91587840	$A_3^2\ A_4$	80
−2016	−91376640	$A_1^2\ A_4\ D_4$	80
28728	−291991392	$A_1^2\ A_2\ A_6$	84
−9504	−87671808	$A_1\ A_2\ A_3\ D_4$	96
25920	−258530688	$A_1^2\ A_3\ A_5$	96
10368	−111808512	$A_1^3\ A_2\ D_5$	96
25800	−158892000	$A_1^2\ A_4^2$	100
−92016	−100217088	$A_2^3\ D_4$	108
57888	−587590848	$A_1\ A_2^2\ A_5$	108
135072	−1194157440	$A_1^4\ A_6$	112
50544	−446143680	$A_1\ A_2\ A_3\ A_4$	120
44160	−470676480	$A_1\ A_3^3$	128
43776	24514560	$A_1^3\ A_3\ D_4$	128
91776	−823480320	$A_1^5\ D_5$	128
95904	−396614880	$A_2^3\ A_4$	135
43200	−592731648	$A_2^2\ A_3^2$	144
88128	127567872	$A_1^2\ A_2^2\ D_4$	144
254016	−2118783744	$A_1^3\ A_2\ A_5$	144
235008	−2547590400	$A_1^3\ A_3\ A_4$	160
440640	−4765979520	$A_1^2\ A_2^2\ A_4$	180
490752	−4822640640	$A_1^2\ A_2\ A_3^2$	192
152064	−7523352576	$A_1^4\ A_2\ D_4$	192
1003392	−11965847040	$A_1^5\ A_5$	192
997920	−9768335616	$A_1\ A_2^3\ A_3$	216
2134080	−18668931840	$A_1^4\ A_2\ A_4$	240
2130624	−32526230400	A_2^5	243
2265600	−21418807296	$A_1^4\ A_3^2$	256
2700288	8977121280	$A_1^6\ D_4$	256
4136832	−39766381056	$A_1^3\ A_2^2\ A_3$	288
8167680	−90745344000	$A_1^6\ A_4$	320
8335872	−62561403648	$A_1^2\ A_2^4$	324
15227136	−158582292480	$A_1^5\ A_2\ A_3$	384
24312960	−294147790848	$A_1^4\ A_2^3$	432
70705152	−628909424640	$A_1^7\ A_3$	512
138060288	−978881863680	$A_1^6\ A_2^2$	576
215212032	−6301501194240	$A_1^8\ A_2$	768
3917168640	13653980282880	A_1^{10}	1024

(Degree 11) Fourier coefficients of f_{23}.

f_{23}	Lattice	det
1	D_{11}	4
0	$A_3\ E_8$	4
0	$A_1\ A_2\ E_8$	6
6	$D_4\ E_7$	8
4	$A_1\ D_{10}$	8
0	$A_1^3\ E_8$	8
−6	$A_4\ E_7$	10
12	$D_5\ E_6$	12
21	A_{11}	12
−6	$A_2\ D_9$	12
−8	$D_5\ D_6$	16
−72	$D_4\ D_7$	16
−16	$A_3\ D_8$	16
12	$A_1\ A_3\ E_7$	16
48	$A_1^2\ D_9$	16
−72	$A_5\ E_6$	18
36	$A_2^2\ E_7$	18
50	$A_4\ D_7$	20
148	$A_1\ A_{10}$	22
24	$A_5\ D_6$	24
252	$A_1\ D_4\ E_6$	24
96	$A_1\ A_2\ D_8$	24
−72	$A_1^2\ A_2\ E_7$	24
−266	$A_6\ D_5$	28
24	$A_2\ A_9$	30
−60	$A_1\ A_4\ E_6$	30
−480	$A_7\ D_4$	32
352	$A_1\ D_5^2$	32
96	$A_1\ D_4\ D_6$	32
−48	$A_1\ A_3\ D_7$	32
192	$A_1^3\ D_8$	32
240	$A_1^4\ E_7$	32
−270	$A_3\ A_8$	36
648	$A_2\ A_3\ E_6$	36
0	$A_2^2\ D_7$	36
−64	$A_4\ A_7$	40
−128	$A_1\ A_4\ D_6$	40
1120	$A_1^2\ A_9$	40
840	$A_5\ A_6$	42
2736	$A_2\ D_4\ D_5$	48
144	$A_2\ A_3\ D_6$	48
−912	$A_1\ A_5\ D_5$	48
−240	$A_1^2\ A_3\ E_6$	48
768	$A_1^2\ A_2\ D_7$	48
1944	$A_1\ A_2\ A_8$	54
−1944	$A_1\ A_2^2\ E_6$	54
−2772	$A_1\ A_6\ D_4$	56
1560	$A_2\ A_4\ D_5$	60
10368	$A_3\ D_4^2$	64
4928	$A_3^2\ D_5$	64
1216	$A_1\ A_3\ A_7$	64
2688	$A_1^2\ D_4\ D_5$	64
832	$A_1^2\ A_3\ D_6$	64
1344	$A_1^4\ D_7$	64
1260	$A_1\ A_4\ A_6$	70
108	$A_2\ A_5\ D_4$	72
6912	$A_2^2\ A_7$	72
1584	$A_1\ A_5^2$	72
1152	$A_1\ A_2^2\ D_6$	72
8208	$A_1^3\ A_8$	72
1296	$A_1^3\ A_2\ E_6$	72
8880	$A_3\ A_4\ D_4$	80
−640	$A_1^2\ A_4\ D_5$	80
2184	$A_2\ A_3\ A_6$	84
−2268	$A_2\ A_4\ A_5$	90
−384	$A_3^2\ A_5$	96

f_{23}	Lattice	det
−6912	$A_1\ A_2\ D_4^2$	96
−3936	$A_1\ A_2\ A_3\ D_5$	96
−2880	$A_1^2\ A_5\ D_4$	96
11136	$A_1^2\ A_2\ A_7$	96
1152	$A_1^3\ A_2\ D_6$	96
8928	$A_1^5\ E_6$	96
3680	$A_3\ A_4^2$	100
−30672	$A_2^3\ D_5$	108
9072	$A_1^2\ A_3\ A_6$	112
5400	$A_1\ A_2\ A_4\ D_4$	120
12000	$A_1^2\ A_4\ A_5$	120
21672	$A_1\ A_2^2\ A_6$	126
−4608	$A_1\ A_3^2\ D_4$	128
59904	$A_1^3\ D_4^2$	128
8064	$A_1^3\ A_3\ D_5$	128
59136	$A_1^4\ A_7$	128
33024	$A_1^5\ D_6$	128
−93312	$A_2^2\ A_3\ D_4$	144
30456	$A_1\ A_2\ A_3\ A_5$	144
15552	$A_1^2\ A_2^2\ D_5$	144
19440	$A_1\ A_2\ A_4^2$	150
21568	$A_1\ A_3^2\ A_4$	160
−20736	$A_1^3\ A_4\ D_4$	160
61560	$A_2^3\ A_5$	162
130032	$A_1^3\ A_2\ A_6$	168
53280	$A_2^2\ A_3\ A_4$	180
8832	$A_2\ A_3^3$	192
48384	$A_1^2\ A_2\ A_3\ D_4$	192
94464	$A_1^3\ A_3\ A_5$	192
33408	$A_1^4\ A_2\ D_5$	192
105120	$A_1^3\ A_4^2$	200
195696	$A_1\ A_2^3\ D_4$	216
199584	$A_1^2\ A_2^2\ A_5$	216
235872	$A_1^5\ A_6$	224
176160	$A_1^2\ A_2\ A_3\ A_4$	240
228864	$A_1^2\ A_3^3$	256
221184	$A_1^4\ A_3\ D_4$	256
503808	$A_1^6\ D_5$	256
328320	$A_1\ A_2^3\ A_4$	270
329472	$A_1\ A_2^2\ A_3^2$	288
96768	$A_1^3\ A_2^2\ D_4$	288
584928	$A_1^4\ A_2\ A_5$	288
712320	$A_1^4\ A_3\ A_4$	320
653184	$A_2^4\ A_3$	324
1166400	$A_1^3\ A_2^2\ A_4$	360
1525248	$A_1^3\ A_2\ A_3^2$	384
0	$A_1^5\ A_2\ D_4$	384
3423744	$A_1^6\ A_5$	384
3692736	$A_1^2\ A_2^3\ A_3$	432
7369920	$A_1^5\ A_2\ A_4$	480
9377856	$A_1\ A_2^5$	486
5677056	$A_1^5\ A_3^2$	512
20348928	$A_1^7\ D_4$	512
7464960	$A_1^4\ A_2^2\ A_3$	576
−7403520	$A_1^7\ A_4$	640
1306368	$A_1^3\ A_2^4$	648
26431488	$A_1^6\ A_2\ A_3$	768
104830848	$A_1^5\ A_2^3$	864
277241856	$A_1^8\ A_3$	1024
62484480	$A_1^7\ A_2^2$	1152
−86261760	$A_1^9\ A_2$	1536
26298777600	$A_1^1 1$	2048

References

[1] J. Arthur, *Unipotent automorphic representations: conjectures*, Astérisque **171-172** (1989), 13–71.

[2] S. Böcherer, *Über die Fourier-Jacobi-Entwicklung Siegelscher Eisensteinreihen. I*, Math. Z. **183** (1983), 21–46.

[3] S. Böcherer, *Siegel modular forms and theta series*, Proc. Symp. Pure Math. **49-2** (1989), 3–17.

[4] S. Böcherer, Über die Funktionalgleichung automorpher L-Funktionen zur Siegelschen Modulgruppe, J. Reine Angew. Math. **362** (1985), 146–168.

[5] R. E. Borcherds' home page http://www.dpmms.cam.ac.uk/˜reb.

[6] R. E. Borcherds, E. Freitag, and R. Weissauer, *A Siegel cusp form of degree 12 and weight 12*, J. Reine Angew. Math. **494** (1998), 141–153.

[7] S. Breulmann and M. Kuss, *On a conjecture of Duke-Imamoglu*, Proc. Amer. Math. Soc **107** (2000),

[8] H. Cohen, *Sommes de carrés, fonctions L et formes modulaires*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **277** (1973), A827–A830.

[9] H. Cohen *Sums involving the values at negative integers of L-functions of quadratic characters*, Math. Ann. **217** (1975), 271–285.

[10] J. H. Conway and N. J. A.Sloan, *Sphere Packings, Lattices, and Groups*, 3rd edition, Springer-Verlag, 1998

[11] W. Duke and Ö. Imamoglu, *Siegel modular forms of small weight*, Math. Ann. **310** (1998), 73–82.

[12] M. Eichler and D. Zagier, *The theory of Jacobi forms*, Progress in Mathematics **55** Birkhäuser Boston, Inc., Boston, Mass. 1985.

[13] V. A. Erokhin, *Theta-series of even unimodular 24-dimensional lattices*, LOMI **86** (1979) pp. 82–93. translation in J. Soviet math. **17** (1981) pp. 1999–2008.

[14] P. Feit, *Poles and residues of Eisenstein series for symplectic and unitary groups*, Momoirs of the AMS. **346** 1986.

[15] P. Feit, *Explicit formulas for local factors in the Euler products for Eisenstein series*, Nagoya Math. J. **95** (1989), 37–87.

[16] E. Freitag, *Siegelsche Modulfunktionen*, Springer-Verlag, 1983.

[17] P. B. Garrett, *Pullbacks of Eisenstein series; applications*, Automorphic forms of several variables (Katata, 1983), pp. 114–137, Progr. Math., **46**, Birkhäuser Boston, Boston, Mass., (1984)

[18] T. Ibukiyama, *On Jacobi forms and Siegel modular forms of half-integral weights*, Comment. Math. Univ. St. Paul. **41** (1992), 109–124.

[19] T. Ibukiyama, *Conjecture on the lifting of modular forms to Siegel modular forms*, informal note.

[20] T. Ikeda, *On the theory of Jacobi forms and the Fourier-Jacobi coefficients of Eisenstein series*, J. Math. Kyoto Univ. **34** (1994), 615–636.

[21] ———, *On the lifting of elliptic cusp forms to Siegel cusp forms of degree* $2n$, preprint, 2000

[22] ———, *On some construction of Siegel modular forms: Miyawaki's conjecture*, preprint, 2000

[23] H. Katsurada, *An explicit formula for Siegel series*, Amer. J. Math. **121** (1999), 415–452.

[24] Y. Kitaoka, *Dirichlet series in the theory of Siegel modular forms*, Nagoya Math. J. **95** (1984), 73–84.

[25] W. Kohnen, *Modular forms of half-integral weight on* $\Gamma_0(4)$, Math. Ann. **248** (1980), 249–266.

[26] W. Kohnen and D. Zagier, *Values of L-series of modular forms at the center of the critical strip*, Inv. Math. **64** (1981), 175–198.

[27] N. Kurokawa, *Examples of eigenvalues of Hecke operators on Siegel cusp forms of degree two*, Inv. Math. **49** (1978), 149–165.

[28] I. Miyawaki, *Numerical examples of Siegel cusp forms of degree* 3 *and their zeta functions*, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. **46** (1992), 307–309.

[29] C. Moeglin, M.-F. Vignéras, and J.-L. Waldspurger, *Correspondances de Howe sur un corps p-adique*, Lecture Notes in Math. **1291** (1987).

[30] G. Nebe homepage, http://samuel.math.rwth-aachen.de/~LBFM/gabi/,

[31] G. Nebe and B. Venkov, *On Siegel modular forms of weight* 12, preprint,

[32] G. Shimura *Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions*, Publ. Math. Soc. Japan **11** Iwanami Shoten and Princeton University Press, 1971.

[33] ———, *On modular forms of half integral weight*, Ann. of Math. **97** (1973), 440–481.

[34] ———, *Euler products and Eisenstein series*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics **93** the American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.

[35] D. Zagier, *Sur la conjecture de Saito-Kurokawa*, (d'aprés H. Maass) Seminar on Number Theory 1979–80, Paris, Progr. Math., **12**, Birkhäuser, 371–394, 1981.

GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICS, KYOTO UNIVERSITY, KITASHIRAKAWA, KYOTO, 606-8502, JAPAN

E-mail address: `ikeda@kusm.kyoto-u.ac.jp`